Aufgabenblock 7

1. 2015/SII/ 1.1 – 1.4

1.1

36 Sektoren (18 rot, 12 gelb, 6 schwarz)

Baumdiagramm

P(r) = $\frac{1}{2}$, P(gr) = $\frac{1}{6}$, P(gg) = $\frac{1}{9}$, P(gs) = $\frac{1}{18}$, P(sr) = $\frac{1}{12}$, P(sg) = $\frac{1}{18}$, P(ss) = $\frac{1}{36}$

1.2

$E_1 = \{r; gr; sr\}$

$P(E_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$E_2 = \{gg, ss\}$

$P(E_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

1.3

X: Reingewinn

ω_i	gr	gg	gs	sr	sg	ss
x	+2	0	-7	+2	-16	0

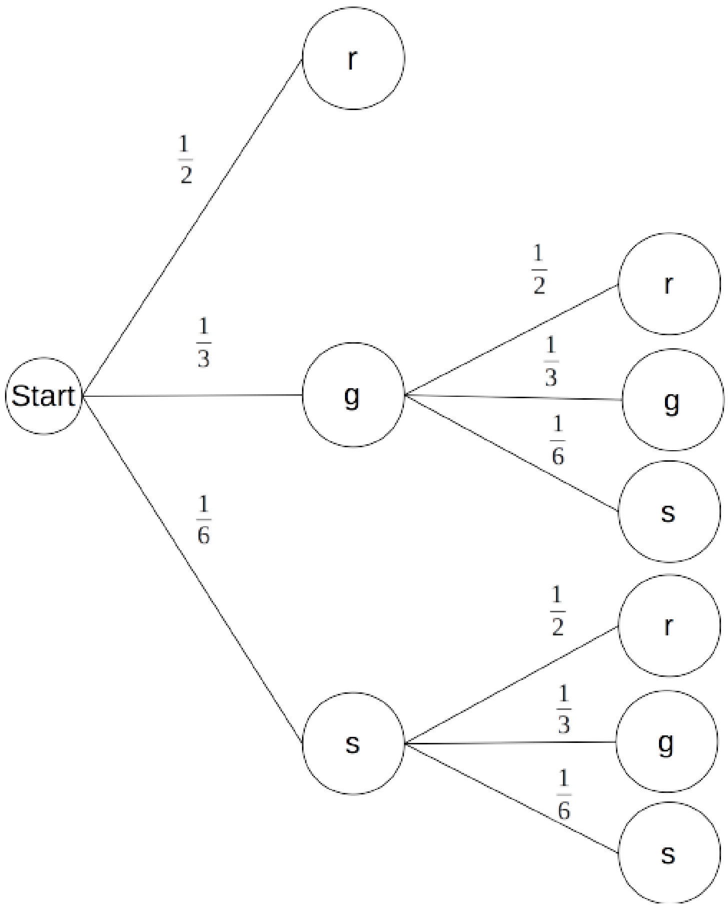
Die Zufallsgröße kann also folgende Zufallswerte annehmen

x	-16	-7	0	2

Aufpassen: Der Reingewinn wird aus Sicht des Festwirts gesehen. Wenn er also zum Beispiel zwei Getränkemarken im Wert von je neun Euro hergeben muss, hat er einen Verlust in Höhe von 16 Euro (18€ - 2€ Einsatz).

Nochmal das Baumdiagramm von oben und ergänzen mit

Baumdiagramm



$\{\omega_i\}$	
$\{r\}$	$\frac{1}{2}$
$\{gr\}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
$\{gg\}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
$\{gs\}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$
$\{sr\}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
$\{sg\}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$
$\{ss\}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

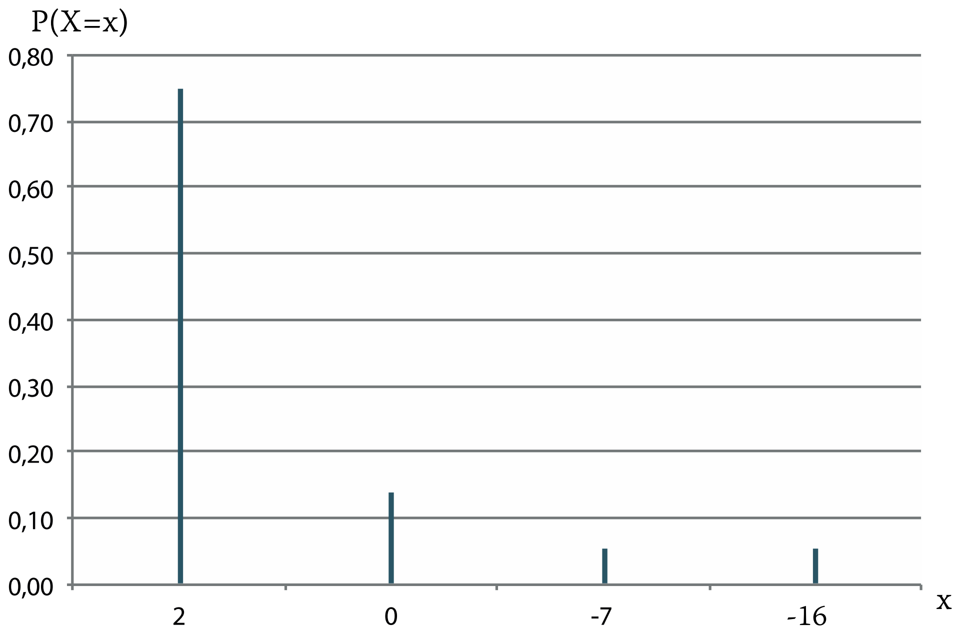
	x
$P(r) = \frac{1}{2}$	2
$P(gr) = \frac{1}{6}$	2
$P(gg) = \frac{1}{9}$	0
$P(gs) = \frac{1}{18}$	-7
$P(sr) = \frac{1}{12}$	2

P(sg) = $\frac{1}{18}$ -16

P(ss) = $\frac{1}{36}$ 0

x	2	0	-7	-16
	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

Stabdiagramm:



1.4

$E(x) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{5}{36} - 7 \cdot \frac{1}{18}-16\cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$

Verschiebungsformel

Var $(x) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 49 \cdot \frac{1}{18} + 256 \cdot \frac{1}{18} - \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{3223}{162}$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{3223}{162}} \approx 4{,}46$

Interpretation: Pro Spiel gewinnt der Festwirt $\frac{2}{9}$ € ($\triangleq 0{,}22$ €)

2. 2015/SI/2

2.1

Um die Werte von a und b berechnen zu können, benötigen wir zwei Gleichungen. Wir wissen:

- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt 1
- Der Erwartungswert liegt bei 18,48

(I) 0,1 + a + b + b - 0,05 + a + 0,15 + 2a = 1

zusammengefasst:

(I) 4a + 2b = 0,8

und

(II) $5\cdot 0{,}1 + 7a + 9b + 12(b - 0{,}05) + 22(a + 0{,}15) + 28 \cdot 2a = 18{,}48$

zusammengefasst:

(II) 85a + 21b = 15,28

also

(I) 4a + 2b = 0,8 ⇒ $b = \frac{0{,}8-4a}{2} = 0{,}4 - 2a$

(II) 85a + 21b = 15,28

(I) in (II) 85a + 21 (0,4 – 2a) = 15,28

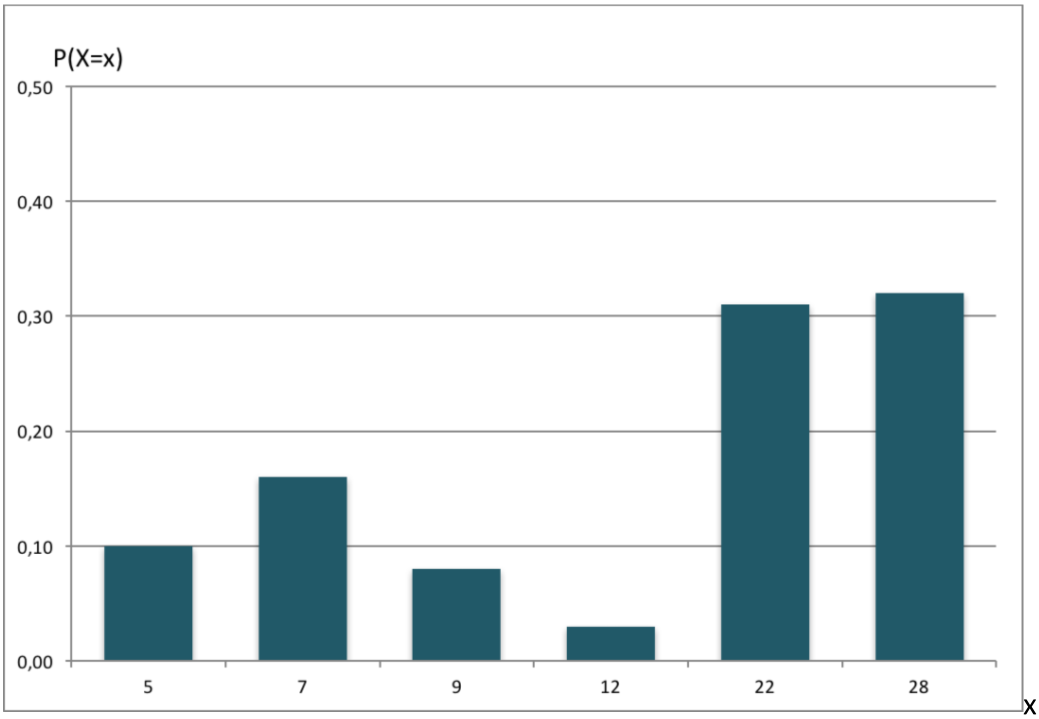
a = 0,16

b = 0,4 – $2 \cdot 0{,}16 = 0{,}08$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße

x	5	7	9	12	22	28
P(X=x)	0,1	0,16	0,08	0,03	0,31	0,32

Histogramm:



2.2 Berechnung der Standardabweichung:

Zunächst berechnen wir die Varianz von x mit Hilfe der Verschiebungsformel

Var(x) = $5^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}16 + 9^2 \cdot 0{,}08 + 12^2 \cdot 0{,}03 + 22^2 \cdot 0{,}31 + 28^2 \cdot 0{,}32 - 18{,}48^2$

= 80,5496

und damit Standardabweichung $\sigma = \sqrt{80{,}5496} \approx 8{,}97$

Die Zufallswerte liegen außerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert.

$\mu + \sigma = 18{,}48 + 8{,}97 = 27{,}45$

$\mu - \sigma = 18{,}48 - 8{,}97 = 9{,}51$

Die Zufallswerte müssen also kleiner als 9,51 sein oder größer als 27,45 (gilt für x = 5, x= 7, x = 9 und x = 28)

Schraffur siehe Histogramm oben

3. 2014/SI/2

2.1

$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(D) = \frac{1}{4} \qquad P(V) = \frac{1}{8}$

Es gilt demnach $P(G) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}$

Nachdem die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Marke immer gleich bleibt handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, mit n = 5

$P(V) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(\overline{V}) = \frac{7}{8} \triangleq p$

$P(E_4) = B\left(5; \frac{7}{8}; 5\right) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \approx 0{,}5129$

Auch bei E_5 handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, weil die Reihenfolge vorgegeben ist. Folgende Kombinationen sind möglich

AAGGD	GGAAD
AADGG	GGDAA
DAAGG	DGGAA
AAGGV	GGAAV
AAVGG	GGVAA
VAAGG	VGGAA

Es gibt also 12 Möglichkeiten. Für die Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(E_6) = \left(\frac{7}{24}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 6 + \left(\frac{7}{24}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 6 \approx 0{,}0213$$

2 mal G   2 mal A   D   Anzahl der Mögl.   V

Wo gehören die Pfeile nochmal hin?

2.2

Diese Zufallsgröße ist binominalverteilt mit n = 5 und p = $\frac{1}{3}$

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = n \cdot p(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{10}{9}}$$

Abweichung vom Erwartungswert

Nach oben: $\mu + \sigma = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{10}{9}} \approx 2{,}72$

Nach unten: $\mu - \sigma = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{10}{9}} \approx 0{,}62$

Die Zufallswerte sollen innerhalb der einfach Standardabweichung um den Erwartungswert liegen, also zwischen 0,62 und 2,72.

Dies ist nur für die Werte k = 1 und k = 2 erfüllt. P(k = 1) + P(k = 2) =* 0,32922 + 0,32922 = 0,658

*Tafelwerk

z. B. auch online bei:

http://www.apps-gratis.info/specials/news-und-infos/das-tafelwerk-voller-zugriff-auf-alle-formeln-bereits-in-der-kostenlosen-version/